

圆形镜平面腔数值迭代计算

陈 钢¹, 徐海磊²

(1. 浙江工业大学 应用物理系, 浙江 杭州 310023; 2. 台州市公安局网警支队, 浙江 台州 318000)

摘 要:从菲涅尔-基尔霍夫积分衍射方程出发, 推导了圆形镜平面腔所满足的自再现模迭代方程, 给出了数值迭代方程的具体形式和 TEM_{00} 、 TEM_{01} 、 TEM_{10} 3 个模式的具体迭代方法。分析计算了 3 个自再现模的形成过程、单程损耗及相位等特性, 并比较了不同菲涅尔数时各模式的本征值和衍射损耗。该方法为研究圆形平面镜谐振腔的激光模式、损耗特性及相位提供了可靠的理论方法, 具体的数值迭代方法也可推广应用到其他类型的谐振腔。

关键词:激光原理; 谐振腔; Fresnel-kirchoff 积分衍射方程; 损耗

中图分类号: N 32 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006 - 7167(2011)09 - 0042 - 04

Calculation of Circular Plane Cavity by Numerical Iteration Method

CHEN Gang¹, XU Hai-lei²

(1. Department of Applied Physics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China;

2. Detachment of Cyber-Police, Taizhou Municipal Bureau of Public Security, Taizhou 318000, China)

Abstract: The self reproducing mode iteration equation of the circular plane cavity was figured out based on the Fresnel-Kirchoff integral and diffraction equation. The equation form and integral method of three cavity modes TEM_{00} , TEM_{01} and TEM_{10} were given, and the formation process of self reproducing mode, the round-trip fractional diffraction loss, and the phase characteristics were analyzed and calculated, together with the influence of eigenvalue and diffraction loss on the Fresnel number. The study provides some theoretical methods in terms of the cavity modes, diffraction loss and phase in the circular plane cavity. The numerical integral methods can be extended to other type resonance cavities.

Key words: principle of lasers; laser cavity; Fresnel-Kirchoff integral equation; loss

0 引 言

在激光器的实际应用及理论研究中, 激光器的输出模式, 也即谐振腔的自再现模一直是一个非常重要的指标和概念。研究人员在实验上对激光模式的测量、控制和改善开展了大量研究^[1-6], 理论上对谐振腔自再现模损耗特性进行理论分析^[7-9], 加强了对谐振腔的损耗和相位的认识。除了激光器的输出模式外, 谐振腔自身的损耗特性也是激光器制造过程一个非常重要的参数, 然而损耗特性很难依据理论公式进行计算, 大多依靠经验公式进行修正, 文献[7]中通过数值计算分析了圆形共焦腔的模式和损耗特性。对于方形

镜平面腔的模式和损耗特性, 文献和教科书都给出了非常详细的论述^[8,10], 然而对圆形平面腔的模式和损耗特性缺乏详细的研究, 而这类谐振腔也有广泛的应用。

本文从基本的菲涅尔-基尔霍夫积分衍射方程出发, 推导了圆形镜平行平面腔自再现模所满足的迭代方程, 用数值计算的方法展现模式自再现的过程和计算方法。给出了 TEM_{00} 、 TEM_{01} 、 TEM_{10} 等模式的迭代方法、本征值和模式分布, 同时给出了自再现过程的单程损耗和单程相移的变化。为研究激光模式和损耗提供了一个补充, 同时为开展激光原理及相关课程的教学研究提供一定参考^[11-13]。

1 积分衍射方程

将菲涅尔-基尔霍夫积分式应用到开腔的 2 个镜面上, 经过第 j 次渡越后生成的场 U_{j+1} 与产生它的场

收稿日期: 2011 - 01 - 11

作者简介: 陈 钢(1975 -), 男, 陕西西安人, 副研究员, 主要从事激光物理、激光动力学研究。

Tel.: 0571-85290310; E-mail: gangchen@zjut.edu.cn

U_j 之间满足迭代关系^[10]:

$$u_{j+1}(x, y) = \frac{ik}{4\pi} \iint_{S_1} u_j(x', y') \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos \theta) ds' \quad (1)$$

自再现模,即当 j 足够大时, U_{j+1} 能够将 U_j 再现出来,其数学表达形式为

$$u_{j+1}(x, y) = \gamma u_j \quad (2)$$

式中, γ 称为积分衍射方程的本征值,是一个与坐标无关的复常数,反映了功率损耗和相位改变。当模式能够自再现时,每经过一次渡越,场振幅分布除了振幅有损失外,其分布形式基本保持不变。对于平面腔,无论是方形镜还是圆形镜,方程(1)均不能得到近似的解析解,只能依靠数值迭代方法计算出相应的场分布函数和本征值。方形镜平面腔的积分衍射方程教科书上都给出了非常详细的推导过程,其形式为

$$\gamma u(x, y) = \frac{i}{\lambda L} e^{-ikL} \times \int_{-a}^a \exp\left\{-ik \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2L}\right\} u(x', y') dx' dy' \quad (3)$$

对于方形平面腔,通常利用 Fox-Li 的数值迭代过程^[14],可以给出一些计算结果。而实际激光器的腔镜多为圆形,对于圆形平面腔的积分方程,教科书上却没有给出其计算方法,因此想要进一步用迭代法求解,往往很难进行。本文重点探讨圆形平面腔迭代方程的推导及计算方法,从而为计算圆形平面腔的场分布和衍射损耗提供参考。

对于圆形镜,用直角坐标表示镜面上各个点比较麻烦,因此用镜面上的极坐标来表示各个点^[7]。由极坐标和直角坐标的转换关系, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, 其中, r, ϕ 为极坐标参量。将 x, y 用相应的极坐标参量代换并代入方程(3),得

$$\gamma u(r_2, \varphi_2) = \frac{i}{\lambda L} e^{-ikL} \times \iint_{S_1} \exp\left\{-ik \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2L}\right\} u(r_1, \varphi_1) r_1 dr_1 d\varphi_1 \quad (4)$$

为了分离变量,对圆形镜谐振腔,其场分布函数经常采用如下形式^[7]:

$$u_{pl}(r, \phi) = R_{pl}(r) e^{-il\phi} \quad (5)$$

式中: p 表示场分布在径向的变化; l 表示场分布按方位角以不同的正弦或余弦方式变化。

将式(5)代入式(4),可得

$$\gamma R_l(r_2) e^{-il\varphi_2} = \frac{ike^{-ikL}}{2\pi L} \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} \exp\left\{-ik \frac{r_1 r_2}{L} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - il\phi_1\right\} d\phi_1 \right] \times e^{-ik \frac{r_1^2 + r_2^2}{2L}} R_l(r_1) r_1 dr_1 \quad (6)$$

式中,右边积分可以分离为 ϕ 和 r 的积分,方括号内 ϕ 的积分可以仿照圆形镜共焦腔来进行,利用积分关系

$$\int_0^{2\pi} \exp\left\{-ik \frac{r_1 r_2}{L} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - il\phi_1\right\} d\phi_1 = 2\pi e^{il(\frac{\pi}{2} - \varphi_2)} J_l\left(k \frac{r_1 r_2}{L}\right) \quad (7)$$

式中, J_l 为 l 阶第一类贝塞尔函数。再将式(7)代入式(6),可以将方程(6)化简为只含径向的本征方程:

$$\gamma R_l(r_2) = \frac{k}{L} e^{-ikL} (i)^{l+1} \int_0^a J_l\left(\frac{kr_1 r_2}{L}\right) e^{-ik \frac{r_1^2 + r_2^2}{2L}} R_l(r_1) r_1 dr_1 \quad (8)$$

方位角 ϕ 已经归到 i 指数之中,这样圆形平面腔就简化为一个 r 方向的条形平面窄带腔,只要考虑 r 方向。

2 迭代方法

条形平行平面腔:宽度为 $2a$,腔长为 L ,菲涅尔数为 N ,根据菲涅尔数的取值决定腔长 L 。有关参量取为: $\lambda = 400 \text{ nm}$, $a = 25 \text{ } 000\lambda$,根据计算需要选择 N ,则 $L = a^2 / (\lambda N)$ 。

2.1 TEM₀₀模迭代

数值迭代开始前需要给定初始的场分布 R_l^1 ,对 TEM₀₀模,设初始场分布为均匀平面波,将 $0 \leq r \leq a$ 等分为 N 个点,令 $R_l^1(r) = 1$,即镜面上各点振幅均为 1。

具体迭代过程为

$$\begin{cases} R_l^1(r_j) = 1 \\ R_l^2(r_j) = \frac{k}{L} e^{-ikL} (i)^{l+1} \int_0^a J_l\left(\frac{kr_1 r_j}{L}\right) AR_l^1(r_1) r_1 dr_1 \\ R_l^3(r_j) = \frac{k}{L} e^{-ikL} (i)^{l+1} \int_0^a J_l\left(\frac{kr_1 r_j}{L}\right) AR_l^2(r_1) r_1 dr_1 \\ \vdots \\ R_l^{q+1}(r_j) = \frac{k}{L} e^{-ikL} (i)^{l+1} \int_0^a J_l\left(\frac{kr_1 r_j}{L}\right) AR_l^q(r_1) r_1 dr_1 \end{cases} \quad (9)$$

$$A = \exp[-ik(r_1^2 + r_j^2)/2L]$$

第 q 次迭代后, r_1, r_2, \dots, r_N 各点本征值为

$$\gamma_{q+1}(r_j) = \frac{R_l^{q+1}(r_j)}{R_l^q(r_j)} \quad (10)$$

迭代过程收敛性判据为^[7]:

$\max(|\gamma_{q+1}(r_i)| - |\gamma_q(r_i)|) < \min(|\gamma_{q+1}(r_i)|)^*$ 精度,当 q 次迭代后方程收敛,最终的本征值为 N 个点本征值的平均值,即

$$\gamma = \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_{q+1}(r_j)}{N} \quad (11)$$

单程损耗 $\delta_d = 1 - |\gamma|^2$,单程相移 $\delta\Phi = \arg \gamma$ 。

2.2 TEM₁₀模迭代

TEM₁₀模的迭代稍微复杂一些,此时场分布在 r 方向有一个零点,设该位置为 r_z ,这是由初始场分布和零阶贝塞尔函数共同导致的结果。为了能让贝塞尔函数

取到零值, r 方向的离散点应取得小一些, 不至于离散点间隔太大跳过零值位置, 一般间隔取 $0.01a$ 就可以了, r_x 位置的可以设置在 $0.5a$ 的位置。图1比较了不同间隔时积分方程中零阶贝塞尔函数的取值情况, 可以看出, 间隔为 $0.1a$ 时不但会跳过贝塞尔函数的零点, 一些极值点也跳过了, 而间隔为 $0.01a$ 时能很好地表示贝塞尔函数的取值。表1给出了迭代过程的部分参数设置。

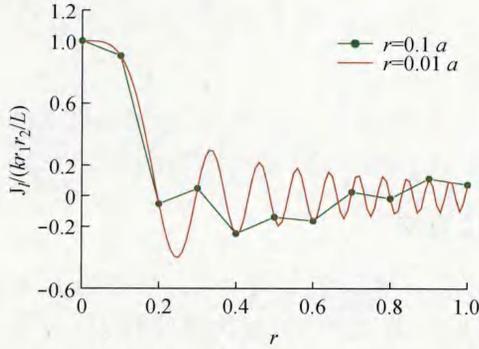


图1 不同间隔大小时贝塞尔函数取值比较

2.3 TEM₀₁模迭代

TEM₀₁模的迭代和TEM₀₀模的参数设置都一样, 只需要将积分方程中贝塞尔函数从零阶增加到一阶即

表2 TEM₀₀模迭代过程参数($\lambda = 400 \text{ nm}$, $a = 1 \text{ cm}$, 精度 0.0001)

	菲涅尔数 N													
	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00	3.00	6.25	10	15	20	>20	不收敛
迭代次数	5	7	14	21	26	33	30	67	80	170	251	329		
本征值	0.626 0	0.798 7	0.881 4	0.909 5	0.933 2	0.947 6	0.962 1	0.977 7	0.993 0	0.996 6	0.998 7	0.999 6		
衍射损耗	0.608 1	0.362 1	0.223 2	0.172 8	0.129 2	0.102 1	0.074 4	0.044 2	0.014 0	0.006 8	0.002 6	0.000 8		

TEM₁₀模的迭代过程是分两步进行的, 表3给出的本征值和衍射损耗只是第一部分迭代过程给出的。一方面这部分能量较大, 能够说明该模式的主要特性;

表3 TEM₁₀模迭代过程参数($\lambda = 400 \text{ nm}$, $a = 1 \text{ cm}$, 精度 0.001)

	菲涅尔数 N											
	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00	3.00	6.25	10	15	20
迭代次数	2	3	4	6	10	10	12	23	39	27	40	70
本征值	0.321 5	0.563 3	0.699 2	0.765 9	0.808 5	0.846 2	0.896 6	0.934 3	0.975 9	0.993 8	0.998 3	0.988 8
衍射损耗	0.896 6	0.682 7	0.511 1	0.413 4	0.346 3	0.283 9	0.196 1	0.127 0	0.047 7	0.012 4	0.003 5	0.022 2

TEM₀₁模具有很好的收敛性, 对于较小和较大的菲涅尔数都能很快收敛, 具体结果见表4。需要注意的是, 当 $N > 25$ 后, 尽管迭代方程可以收敛, 但计算结

表4 TEM₀₁模迭代过程参数($\lambda = 400 \text{ nm}$, $a = 1 \text{ cm}$, 精度 0.001)

	菲涅尔数 N													
	0.25	0.5	0.75	1.00	1.25	1.5	2	3	5	10	15	20	25	30
迭代次数	3	5	8	10	13	16	21	31	48	81	100	132	163	176
本征值	0.250 0	0.555 8	0.676 4	0.779 3	0.813 3	0.848 4	0.892 8	0.929 7	0.953 2	0.971 9	0.976 2	0.980 3	0.981 8	0.971 5
衍射损耗	0.937 5	0.691 0	0.542 5	0.392 6	0.338 5	0.280 3	0.203 0	0.135 7	0.091 4	0.055 3	0.046 9	0.038 9	0.036 2	0.056 1

表1 TEM₁₀模迭代过程参数设置

	第一部分	第二部分
径向范围	$0 \leq r \leq r_x$	$r_x \leq r \leq a$
初始值	$R_0^1(r) = 1, R_0^1(r_x) = 0$	$R_0^1(r) = 1, R_0^1(r_x) = 0, R_0^1(a) = 0$
积分区间	$0 - r_x$	$r_x - a$
本征值	不比较 $\gamma(r_x)$	不比较 $\gamma(r_x), \gamma(a)$
本征值精度	0.001	0.01

可。另外, 初始值设置时 $R_0^1(0) = 0, R_0^1(a) = 0$, 本征值比较时排除这2个点。

3 计算结果

TEM₀₀模计算参数和结果如表2所示。可以看出, 随着菲涅尔数的增大, 方程收敛所需的迭代次数不断增大, 本征值越来越接近1, 衍射损耗越来越小, 这很好地体现了菲涅尔数和衍射损耗之间的倒数关系。另外, 数值迭代过程发现在菲涅尔数为某些值时会出现假收敛现象, 即迭代次数较少, 得到的本征值大于1, 此时应该在收敛判据里增加一项, 要求迭代次数大于这个迭代次数。当菲涅尔数大于20以后, 方程很难收敛, 无论降低精度或增加迭代次数, 场振幅会趋于无穷大。

另一方面, 第二部分的迭代收敛性较差, 需要花费很多的计算时间。第二部分的迭代结果只给出场振幅分布, 不用来计算损耗。

果已经不可靠, 如表中给出的 $N = 30$ 时的本征值下降, 衍射损耗增大, 已经不符合实际情况。

图2给出了圆形平面腔一些低阶模式场振幅分布随 N 的变化情况,以及 $N=10$ 时镜面上的相位分布。从计算结果来看,其振幅分布和圆形共焦腔类似,很好地体现了 TEM_{pl} 模式 p 和 l 的含义,符合圆形镜振幅分布特点。从图中也可以看到,随着 N 的增大,振幅的波纹数增加,一方面是 N 增大时方程迭代次数增加,

数据的不确定性增大;另一方面, N 值越大,积分方程中贝塞尔函数的振荡越强。从计算得到的相位分布来看, TEM_{00} 模的相位在镜子中心基本一致, TEM_{10} 模在镜面上有一个相位反转,而 TEM_{01} 模相位在镜面中心和边缘变化较大。

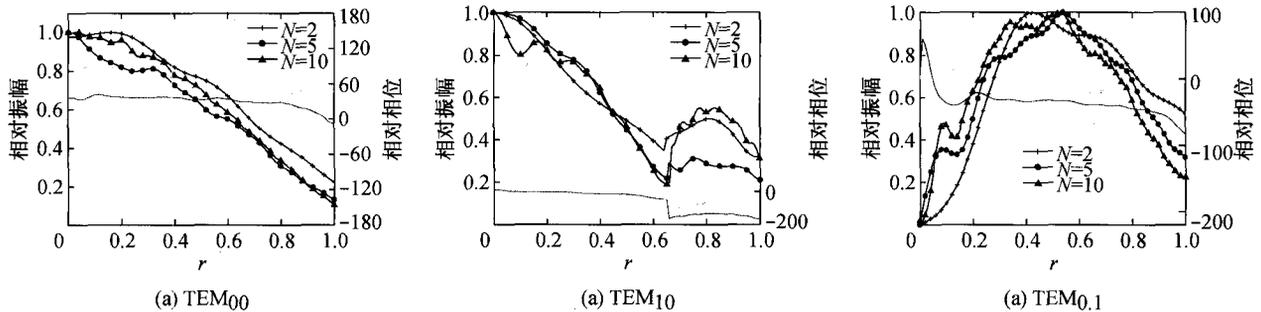


图2 圆形平面腔低阶模场振幅分布

积分方程的数值迭代不仅能够给出场振幅分布的具体形式,还能用来分析不同参数时谐振腔的损耗特性,这对于理解、比较不同形式的谐振腔的损耗特性有很大的帮助。图3是不同模式的平均单程损耗随 N 值的变化,该图在许多激光原理教材中都有,这里我们通过求解不同非涅尔数的积分衍射方程,亲自得到了这个关系。另外,图3中还比较了衍射损耗为 $1/N$ 时的情况,作为对比,说明衍射损耗和非涅尔数定性成倒数关系的事实。利用该方法还可以求解不同类型的谐振腔的积分衍射方程,从而可以非常定量地比较不同谐振腔、不同模式之间的损耗情况。

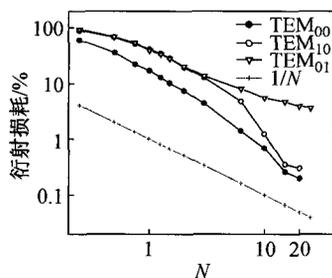


图3 各模式衍射损耗随 N 的变化

4 结 语

利用数值迭代讨论了圆形镜平面腔的衍射积分方程,给出了迭代方程的具体形式和不同模式的迭代方法,数值计算结果给出了3种低阶模式的场振幅分布和衍射损耗随非涅尔数的变化情况,以及镜面上的相位分布。计算结果清晰地展示了圆形镜平面腔的场振幅分布形式和损耗特性,为开展这方面科研和教学提供了一定参考。文中计算所用 Matlab 程序可以自由下载^[15],也可以加以扩充和修改以满足不同的科研和教学需要。

参考文献 (References):

- [1] Cheng C, Xu Z S. Experiment determination of after-operating gas compositions in a transverse-flow CW high power CO₂ laser [J]. Optics and Laser Technology, 2005, 37(4):293-297.
- [2] Martin G G, Ignacio J R, Violeta D A, et al. An analytical approach to the design of electrodes in high-power, fast-transverse-flow CO₂ lasers[J]. Optics and Laser Technology, 2005, 37(8): 615-622.
- [3] 陈 钢,魏高尧. He-Ne 激光器纵横模频率特性的实验测量[J]. 实验室研究与探索, 2010,29(6):33-36.
- [4] 程 成,马行超,许周速,等. 高功率横流 CO₂ 激光模随时间变化的测量[J]. 中国激光,2008,35(4):549-554.
- [5] 陈 钢,许周速,程 成. 管板式电极结构对大功率横流 CO₂ 激光模的影响[J]. 中国激光,2010,37(4):944-949.
- [6] 王文鹏,许周速,徐 军,等. 封离式 He-N₂-CO₂ 激光器横模特性的测量与分析[J]. 物理学报,2009,58(8):5423-5428.
- [7] 凌东雄,李俊昌. 横向激励 kW 级 CO₂ 激光器输出模式分布的数值计算[J]. 应用激光,1992,12(4):173-177.
- [8] 聂 辉,翁兴涛,杨 越. 激光平行平面有源腔自再现模的探求[J]. 光学与光电技术,2003,1(3):44-47.
- [9] 丁长林,万重怡. 脉冲 CO₂ 激光器的多频动力学模型[J]. 物理学报,2006,55(3):1165-1170.
- [10] 周炳琨,高以智,陈倜嵘. 激光原理[M]. 5版.北京:国防工业出版社,2005.
- [11] 于文兵. 激光原理与技术课程中开展研究性学习的探索[J]. 湖北师范学院学报(自然科学版),2008,5(3):116-118.
- [12] 杜文果. 激光原理课程中的激光效率辨析[J]. 电气电子教学学报,2008,30(2):40-42.
- [13] 张立彬. 国外激光原理经典教材述评[J]. 中国大学教学,2010,5(2):89-91.
- [14] Fox A G, Li T Y. Resonant mode in a maser interferometer[J]. Bell Syst Tech J, 1961,40(3):453-488.
- [15] 陈 钢. 圆形平面腔数值迭代 matlab 计算程序 [CP/OL]. (2011-02-15) [2011-02-20]. <http://blog.sciencenet.cn/u/zjutchen>.